

PRESENTACIÓN DE LAS CARTILLAS

Estas cartillas abordan diversos tópicos matemáticos, generalmente incluidos en el plan de estudios de la Licenciatura. Consisten en definiciones y en una serie de enunciados enumerados consecutivamente que se agrupan en secciones encabezadas por una frase descriptiva. Cada enunciado es consecuencia más o menos inmediata de las definiciones y enunciados anteriores. Los breves razonamientos, casi siempre explicados detalladamente, requieren mínimo esfuerzo y nunca exigen argumentación extensa. No intenté proporcionar problemas difíciles, ni siquiera ejercicios. Simplemente expongo resultados bien conocidos de una manera que me ha parecido didáctica y accesible a estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas.

El estilo es clásico, original de Euclides, quien nunca abandona al lector los aspectos difíciles de la exposición. Espero que la lejana imitación estilística que hago resulte aceptable y útil.

Para comprender Matemáticas nada hay mejor que las motivaciones heurísticas, las explicaciones y los ejemplos obtenidos directamente de boca de un instructor voluntarioso con experiencia en la materia. Las cartillas son sucedáneos que nunca le reemplazarán.

Cartillas Matemáticas

Axioma de Elección y Lema de Zorn

Daniel Crespín

Escuela de Matemáticas, Facultad de Ciencias

Universidad Central de Venezuela

<http://euler.ciens.ucv.ve/~dcrespin/Pub>

1. PRELIMINARES

En esta cartilla se estudiará la equivalencia entre el axioma de elección y el lema de Zorn. Recordemos los respectivos enunciados:

Axioma de elección: Para cada colección indiciada de conjuntos no vacíos existe al menos una función que a cada índice asigna un elemento del correspondiente miembro de la colección.

Lema de Zorn: Si en un conjunto preordenado toda cadena tiene cota superior entonces hay en el conjunto al menos un elemento maximal.

Se trata de un tema centenario y muy manido. La cartilla apuesta a que aún queda espacio para presentarlo con algunas mejoras que faciliten su asimilación.

La equivalencia entre el axioma de elección y el lema de Zorn es un requisito indispensable para desarrollar las partes más útiles de la teoría de conjuntos. Al igual que otros tópicos que fundamentan áreas extensas de las Matemáticas, los planteamientos deben tener la mayor amplitud posible. Así, no se imponen restricciones a la cardinalidad de los conjuntos y salvo algunos ejemplos ilustrativos pero totalmente prescindibles en el desarrollo teórico, tampoco se utilizan los números naturales.

Los ejemplos obedecen al siguiente criterio: El estudioso que desea comprender el origen de las definiciones, construcciones y razonamientos debe conocer casos concretos que ilustren acertadamente la teoría. Por tal motivo he intercalado en texto pequeño comentarios y ejemplos que, aunque no son estrictamente necesarios o corresponden a tópicos lógicamente posteriores, se justifican por su valor didáctico. Además, donde se puede facilitar así la lectura, he repetido pequeños trozos previamente explicados.

Suponemos que el lector, tal vez alumno del curso de Topología General, ya está familiarizado con los aspectos básicos de la teoría elemental de conjuntos, incluyendo las operaciones de unión e intersección de familias arbitrarias, relaciones de orden y funciones.

2. PREORDEN, ORDEN Y CADENAS

Repasemos algunas definiciones básicas. Sea X un conjunto. Denotamos por $\mathcal{P}(X)$ la colección de los subconjuntos de X

$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$$

Un *preorden* en X es una relación en X , denotémosla $\leq$, que es reflexiva y transitiva

$$\begin{aligned} \forall x, \quad x &\leq x \\ \forall x, y, z, \quad x &\leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z \end{aligned}$$

Cuando $x \leq y$ diremos que x *precede* a y y que y *sigue* a x (en el preorden dado).

Un *orden*, sinónimo de *orden parcial*, es un preorden que además es antisimétrico

$$x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$$

Por ventaja de lenguaje también llamaremos preorden a un conjunto preordenado, y llamaremos orden a un conjunto ordenado. Así, frecuentemente diremos ‘ X es un preorden’ en lugar de ‘ X es un conjunto con una relación de preorden’, y diremos también ‘ X es un orden’ en lugar de ‘ X es un conjunto con una relación de orden’.

Sea A un subconjunto del preorden X . El elemento $u \in X$ es *cota superior* de A , y A es *acotado superiormente* (por u), si u sigue a todos los elementos de A

$$\forall a \in A \quad a \leq u$$

Denotaremos por $U(A)$ el conjunto de las cotas superiores de A . Obviamente este conjunto es no vacío si y solo si A es acotado

$$U(A) \neq \emptyset \Leftrightarrow A \text{ es acotado}$$

Un elemento m del preorden X es *maximal* si todo elemento de X que lo sigue también lo precede

$$m \leq x \Rightarrow x \leq m$$

Cuando el preorden es antisimétrico, es decir, cuando se trata de un orden, un elemento es maximal si no lo sigue ningún elemento distinto de si mismo

$$m \leq x \Rightarrow m = x$$

Las partes de un conjunto son ejemplo primordial de conjunto ordenado; la relación de contención, $A \subseteq B$, es reflexiva, simétrica y transitiva, luego

1.- La contención entre subconjuntos define en $\mathcal{P}(X)$ una relación de orden.

Los tres ejemplos siguientes ilustran adicionalmente los conceptos introducidos.

1.- Sea X un conjunto y defina en $\mathcal{P}(X)$ la siguiente relación: A está contenido en B salvo partes finitas, denotado $A \leq B$, si existen conjuntos finitos F, G tales que $A \cup F \subseteq B \cup G$. Se obtiene un preorden que *no* es antisimétrico ($X - F \leq X$ y $X \leq X - F$ pero $X - F \neq X$) y por lo tanto no es un orden.

2.- Sea D^2 el disco cerrado de centro el origen y radio 1, $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$; S^1 la circunferencia con igual centro y radio, $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Dos puntos distintos $a \neq b \in D^2$ determinan un único *segmento rectilíneo de extremos* a y b :

$$S[a, b] = \{a + t(b - a) \mid 0 \leq t \leq 1\} \subseteq D^2$$

Considere la colección X formada por estos segmentos

$$X = \{S[a, b] \mid a \in D^2, b \in D^2, a \neq b\} \subseteq \mathcal{P}(D^2)$$

Si se ordena X por inclusion entonces se tiene un orden en el cual los elementos maximales son las *cuerdas*, esto es, los segmentos $S[a, b]$ con extremos en la circunferencia, $a, b \in S^1$ (no hay segmentos que contengan una cuerda como subconjunto propio). Hay infinitos elementos maximales y la antisimetría implica que dos elementos maximales comparables tienen que ser iguales.

3.- Sean D^2, S^1, X los conjuntos del ejemplo anterior y defina $\hat{X}$ como la colección de los conjuntos que son diferencia entre un segmento y un conjunto finito, es decir, $A \in \hat{X}$ si existen un segmento $S[a, b] \in X$ y un conjunto finito $F \subseteq D^2$ tales que

$$A = S[a, b] - F$$

Si se preordena X mediante contención salvo partes finitas (ejemplo 1) los elementos maximales M son diferencias entre cuerdas $S[a, b]$, ($a, b \in S^1$) y conjuntos finitos $F \subseteq D^2$

$$M = S[a, b] - F$$

Hay, para cada par fijo $a, b \in S^1$, infinitos elementos maximales $S[a, b] - F$ que se obtienen variando F y que a pesar de que se siguen mutuamente el uno al otro

$$S[a, b] - F \leq S[a, b] - G \quad S[a, b] - G \leq S[a, b] - F$$

son distintos entre si

$$S[a, b] - F \neq S[a, b] - G$$

Este ejemplo se presta a ser graficado; es conveniente reflexionar detenidamente sobre él ya que ilustra la existencia y comportamiento de elementos maximales en un preorden sin antisimetría.

Una *cadena* en el preorden X es un subconjunto $C \subseteq X$ sobre el cual el preorden es total: $c, c' \in C \Rightarrow (c \leq c' \vee c' \leq c)$.

Denotamos por X_C , o por $(X, \leq)_C$ si se quiere ser detallista, la colección de todas las cadenas contenidas en X

$$X_C = (X, \leq)_C = \{C \mid C \subseteq X \text{ y } C \text{ es cadena}\}$$

Observe que $C \subseteq X$ (equivalente a $C \in \mathcal{P}(X)$) y $X_C \subseteq \mathcal{P}(X)$.

2.- Todo subconjunto con un único elemento es una cadena

$$c \in X \Rightarrow \{c\} \in X_C$$

Las cotas superiores permiten ampliar las cadenas:

3.- Si a una cadena se añade una cota superior resulta una cadena

$$C \in X_C \quad \wedge \quad s_u \in U(C) \Rightarrow C \cup \{s_u\} \in X_C$$

En efecto, la cota superior es comparable con todos los miembros de la cadena, luego $C \cup \{s_u\}$ también es cadena.

El siguiente ejemplo puede resultar útil a lectores familiarizados con el Álgebra Lineal. Sea E un espacio vectorial de dimension finita, $\dim E = n$, y considere el conjunto E_V formado por sus subespacios vectoriales

$$E_V = \{S \mid S \text{ es un subespacio vectorial de } E\}$$

de modo que $E_V \subseteq \mathcal{P}(E)$. El orden en el conjunto de los subespacios, igual que en $\mathcal{P}(E)$, es la contención (dos elementos $S, S' \in E_V$ tienen supremo $S \vee S' = S + S'$ e ínfimo $S \wedge S' = S \cap S'$ de manera que E_V es un reticulado).

Por definición una *bandera* es una cadena B en E_V , esto es, B es un subconjunto de B totalmente ordenado por inclusion. Siempre podemos escribir

$$B = \{S_0, \dots, S_k\}$$

con

$$S_0 \subsetneq \dots \subsetneq S_k$$

siendo $S_j \in E_V$ y $k \leq n$.

Matemáticamente la etimología es geométrica: En el caso tridimensional hay banderas que constan de un punto S_0 con $\dim S_0 = 0$ (el pie), una recta S_1 con $\dim S_1 = 1$ la cual contiene al punto (el asta) y un plano S_2 con $\dim S_2 = 2$ el cual contiene a la recta (el pabellón).

La union de una bandera es el mayor de sus subespacios

$$\bigcup B = \bigcup \{S_0, \dots, S_k\} = \{v \mid \exists j \quad v \in S_j\} = S_k$$

y la intersección es el menor

$$\bigcap B = \bigcap \{S_0, \dots, S_k\} = \{v \mid \forall j \quad v \in S_j\} = S_0$$

Una bandera es un subconjunto de E_V

$$B \subseteq E_V \subseteq \mathcal{P}(E)$$

y por lo tanto es un *elemento* de $\mathcal{P}(E_V)$ que a su vez es subconjunto de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$

$$B \in \mathcal{P}(E_V) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$$

Por consiguiente el conjunto formado por todas las banderas, denotado $E_{\mathbf{B}}$, es un *subconjunto* de $\mathcal{P}(E_{\mathbf{V}})$

$$E_{\mathbf{B}} = \{B \mid B \text{ es bandera en } E\} \subseteq \mathcal{P}(E_{\mathbf{V}}) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$$

El conjunto de las banderas esta ordenado por inclusion de manera que si $B = \{S_0, \dots, S_k\}$ y $B' = \{S'_0, \dots, S'_{k'}\}$ entonces $B \subseteq B'$ significa que para todo j , $0 \leq j \leq k$, existe j' , $0 \leq j' \leq k'$, tal que $S_j = S'_{j'} \in B'$.

Una cadena de banderas es un conjunto $\mathcal{B}$ (necesariamente finito puesto que $\dim E = n$) totalmente ordenado por inclusion cuyos elementos son banderas:

$$\mathcal{B} = \{B_0, \dots, B_q\}$$

siendo $B_0 \subseteq \dots \subseteq B_q \in E_{\mathbf{B}}$ y

$$\begin{aligned} B_0 &= \{S_{00}, \dots, S_{0k_0}\} \\ &\vdots \\ B_q &= \{S_{q0}, \dots, S_{qk_q}\} \end{aligned}$$

La unión y la intersección de la cadena $\mathcal{B}$ son banderas

$$\begin{aligned} \bigcup \mathcal{B} &= \{S \mid \exists i \ S \in B_i\} \in E_{\mathbf{B}} \\ \bigcap \mathcal{B} &= \{S \mid \forall i \ S \in B_i\} \in E_{\mathbf{B}} \end{aligned}$$

3. SELECTORES

Sea X un conjunto. En esta sección y hasta la sección 7 inclusive la discusión gira en torno al orden $\mathcal{P}(X)$ y su relación de inclusion; no es necesario suponer que X posee un preorden.

Una *función selectora* o *selector* en X es una función s cuyo dominio es una familia no vacía de subconjuntos de X y cuyo rango es el mismo conjunto X , es decir,

$$s : \mathcal{S} \rightarrow X$$

siendo $\emptyset \neq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Dado un $S \subseteq X$ que satisfaga $S \in \mathcal{S}$, el elemento $s(S) \in X$ es el *seleccionado* por s para $S \in \mathcal{S}$. El *sucesor* del conjunto S es por definición el conjunto obtenido uniéndolo con su seleccionado, es decir, el sucesor de $S \in \mathcal{S}$, denotado S^+ , es

$$S^+ = S \cup \{s(S)\}$$

Por ahora *no* imponemos la importante condición

$$S \in \mathcal{S} \Rightarrow S^+ \in \mathcal{S}$$

Esta propiedad define a las familias inductivas y se estudiará a partir de la sección 4.

La *función sucesor* asociada al selector s es la función $\sigma : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ definida mediante

$$\sigma(S) = S^+ = S \cup \{s(S)\}$$

Por construcción siempre se cumple

$$S \subseteq S^+$$

y, en caso de cumplirse la condición $S^+ \in \mathcal{S}$, se puede aplicar otra vez la función sucesor obteniéndose $S^{++} = \sigma(S^+) = \sigma(\sigma(S^+))$ y tenemos una contención adicional

$$S \subseteq S^+ \subseteq S^{++}$$

Un conjunto es *estacionario* si es igual a su sucesor, es decir, $S \in \mathcal{S}$ es estacionario (respecto al selector s) si $S^+ = S$, lo cual equivale a que el seleccionado por s para S sea un elemento del mismo conjunto, $s(S) \in S$, y también equivale a que S sea un punto fijo de la función sucesor σ , $\sigma(S) = S$.

Cuando el conjunto S no es estacionario entonces está estrictamente contenido en su sucesor, $S \subsetneq S^+$, el cual tiene en este caso exactamente un punto más que el conjunto: $S^+ - S = \{s(S)\}$.

El selector hace ‘crecer’ a S añadiéndole a lo sumo un punto: no hay crecimiento (S es estacionario) o bien el crecimiento es lo mas pequeño posible (se añade a S solamente un punto). Cuando no hay conjuntos estacionarios todos los conjuntos $S \in \mathcal{S}$ crecen.

Para ilustrar la existencia de selectores $s : \mathcal{S} \rightarrow X$ y de conjuntos estacionarios aplicamos el axioma de elección.

4.- Bajo la hipótesis del axioma de elección: Si todos los miembros de una familia $\mathcal{S}$ son no vacíos entonces hay selectores $s : \mathcal{S} \rightarrow X$ para los cuales todos los miembros de $\mathcal{S}$ son estacionarios:

$$\forall S \in \mathcal{S}, \quad S^+ = S$$

En efecto, la familia indiciada $\{S\}_{S \in \mathcal{S}}$ está, según el supuesto, formada por conjuntos no vacíos y el axioma de elección garantiza entonces la existencia de s .

Análogamente,

5.- Supongamos cierto el axioma de elección. Si todos los miembros de una familia $\mathcal{S}$ son distintos de X entonces existen selectores $s : \mathcal{S} \rightarrow X$ para los cuales ningún miembro de $\mathcal{S}$ es estacionario: $\forall S \in \mathcal{S}, \quad S \subsetneq S^+$.

La prueba consiste en aplicar el axioma de elección a la familia indiciada $\{X - S\}_{S \in \mathcal{S}}$ la cual está formada, de acuerdo a la hipótesis, por conjuntos no vacíos.

Para un selector cualquiera s hay en general algunos conjuntos que son estacionarios y otros que no lo son.

Dada una familia $\{X_i\}_{i \in I}$ de partes de X considere la familia $\{X\}_{i \in I}$ indiciada por I con todos sus miembros iguales a X . Hay tantos selectores como elementos en el producto $\prod_{i \in I} X$.

El término *selector* aparece en la literatura matemática unas veces como sinónimo de función de elección y otras designando algún tipo especial de dichas funciones; aquí lo utilizamos de la última manera.

4. INDUCCIÓN GENERALIZADA

Suponga que X es un conjunto, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ y $s : \mathcal{S} \rightarrow X$ es un selector. Considere colecciones sobre las cuales el selector está definido, es decir, colecciones $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{S}$. Por definición $\mathcal{J}$ es *s-inductiva*, o mas brevemente y sin riesgo de confusión, *inductiva*, si contiene los sucesores de todos sus miembros

$$\forall S \in \mathcal{J} \quad S^+ \in \mathcal{J}$$

Esto equivale a que la función sucesor restringida a $\mathcal{J}$ tome valores en la misma familia $\mathcal{J}$

$$\sigma|_{\mathcal{J}} : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J} \subseteq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

Denotaremos por $\mathcal{S}_I$ el conjunto de las colecciones s -inductivas contenidas en el dominio de s .

$$\mathcal{S}_I = \{\mathcal{J} \subseteq \mathcal{S} \mid \mathcal{J} \text{ es } s\text{-inductiva}\}$$

Nótese que $\mathcal{S}_I \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$.

Para las familias inductivas hay toda una serie de contenciones

$$S \subseteq \sigma(S) \subseteq \sigma(\sigma(S)) \subseteq \dots$$

que también se expresan como

$$S \subseteq S^+ \subseteq S^{++} \subseteq \dots$$

Una consecuencia inmediata de la definición es

6.- La intersección de familias inductivas es una familia inductiva

$$(\forall i \in I, \quad \mathcal{J}_i \in \mathcal{S}_I) \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{i \in I} \mathcal{J}_i = \{S \mid \forall i \quad S \in \mathcal{J}_i\} \in \mathcal{S}_I$$

Resulta así el siguiente principio de inducción generalizado:

7.- Si una colección $\mathcal{A}$ de conjuntos está contenida en alguna familia inductiva $\mathcal{J}_0$ entonces está contenida en una familia inductiva $\mathcal{J}[\mathcal{A}]$ que es la menor de todas, esto es, si para algún $\mathcal{J}_0 \in \mathcal{S}_I$ se cumple $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{J}_0$ entonces

$$\exists \mathcal{J}[\mathcal{A}] \in \mathcal{S}_I \ni (\mathcal{A} \subseteq \mathcal{J} \in \mathcal{S}_I \Rightarrow \mathcal{J}[\mathcal{A}] \subseteq \mathcal{J})$$

La familia inductiva $\mathcal{J}[\mathcal{A}]$ es la intersección de las familias inductivas que contienen a $\mathcal{A}$

$$\mathcal{J}[\mathcal{A}] = \bigcap \{\mathcal{J} \in \mathcal{S}_I \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{J}\} = \{S \mid \forall \mathcal{J} \in \mathcal{S}_I \ni \mathcal{A} \subseteq \mathcal{J}, S \in \mathcal{J}\}$$

y se denomina familia inductiva *generada* por $\mathcal{A}$. La hipótesis de existencia de $\mathcal{J}_0$ garantiza que se interseca una colección no vacía.

1.- Si existe $\mathcal{J}_0$ y si la familia generadora tiene un único miembro, $\mathcal{A} = \{A\}$, la familia inductiva generada $\mathcal{J}[\mathcal{A}]$ debe contener tanto a A como a su sucesor, $\sigma(A)$, al sucesor del sucesor, $\sigma(\sigma(A))$, etc.

$$\{A, \sigma(A), \sigma(\sigma(A)), \dots\} \subseteq \mathcal{J}[\mathcal{A}]$$

En ausencia de conjuntos estacionarios los sucesores forman una colección infinita; por el contrario, si alguno es estacionario, la colección es finita.

2.- Hay similitud con los axiomas de Peano, que utilizando la noción de sucesor n^+ de un número natural n , construyen cada uno como consecuente del anterior. Recordemos algunos detalles.

La construcción usual consiste en definir $0 = \emptyset$, $1 = 0 \cup \{0\}$, $2 = 1 \cup \{1\}$ y en general una vez definido n entonces $n^+ = n \cup \{n\}$.

Esto implica que todo número natural es *subconjunto* de $\mathbb{N}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \subseteq \mathbb{N}$$

(prueba: $\emptyset \subseteq \mathbb{N}$; sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos $n \subseteq \mathbb{N}$, entonces $\{n\} \subseteq \mathbb{N}$ y $n^+ = n \cup \{n\} \subseteq \mathbb{N}$). Por consiguiente para los números naturales se cumple, además de $\mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, la muy particular relación

$$\mathbb{N} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

Sea entonces $\mathcal{S} = \mathbb{N} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $s : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{N}$ definida como $s(n) = n$. El sucesor de n es $s(n) = n \cup \{n\} = n + 1$. No hay en $\mathcal{S}$ conjuntos estacionarios pero si se amplía $\mathcal{S}$ añadiéndole $\mathbb{N}$ y se extiende s a $\hat{s} : \hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \cup \{\mathbb{N}\} \rightarrow \mathbb{N}$ entonces $\hat{s}(\mathbb{N}) \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $\mathbb{N} \in \hat{\mathcal{S}}$ necesariamente será $\hat{s}$ -estacionario, lo cual es premonición de **25**.

5. MALLAS

Sea X un conjunto, $\mathcal{P}(X)$ la familia de sus subconjuntos con el orden definido por la contención. Una *mall* o *clase monótona* en X es una subfamilia cerrada respecto a la unión de cadenas. En detalle, sea

$$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

una familia de partes de X ordenada por contención y

$$\mathcal{M}_C = (\mathcal{M}, \subseteq)_C \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$$

la colección de las cadenas contenidas en $\mathcal{M}$, entonces $\mathcal{M}$ es una malla si la unión de cualquier cadena $\mathcal{C} \in \mathcal{M}_C$ está en $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{C} \in \mathcal{M}_C \Rightarrow \bigcup \mathcal{C} = \bigcup \{C \mid C \in \mathcal{C}\} = \{x \mid \exists C \in \mathcal{C} \ni x \in C\} \in \mathcal{M}$$

Dada una colección $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ denotaremos por $\mathcal{S}_M$ la familia de todas las mallas contenidas en $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S}_M = \{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \subseteq \mathcal{S} \text{ y } \mathcal{M} \text{ es una malla}\}$$

Por construcción $\mathcal{S}_M \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$.

Si $\mathcal{M}$ es una malla entonces la familia vacía está contenida en $\mathcal{M}$, $\emptyset \subseteq \mathcal{M}$, y es una cadena cuya unión es el conjunto vacío

$$\bigcup \emptyset = \bigcup \{M \mid M \in \emptyset\} = \emptyset$$

se sigue que

8.- El conjunto vacío es elemento de toda malla

$$\emptyset \in \mathcal{M}$$

En particular las mallas no son vacías. Pero puede ocurrir que tengan solamente un miembro:

9.- La colección cuyo único miembro es el conjunto vacío, $\mathcal{M} = \{\emptyset\}$, es una malla

$$\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(X)_M$$

Toda colección finita que incluya el conjunto vacío es una malla

$$\mathcal{M} = \{\emptyset, M_1, \dots, M_m\} \subseteq \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{M} \in \mathcal{S}_M$$

porque en este caso las cadenas $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$ son finitas y su unión es uno de los miembros de la cadena.

En el otro extremo, la familia de todas las partes es obviamente cerrada respecto a uniones, en particular respecto a uniones de cadenas, luego tomando $\mathcal{S} = \mathcal{P}(X)$ tenemos

10.- La colección $\mathcal{P}(X)$ de todas las partes de X es una malla

$$\mathcal{P}(X) \in \mathcal{P}(X)_{\mathcal{M}}$$

La malla $\mathcal{P}(X)$ formada por todas las partes, y la formada por el subconjunto vacío, $\{\emptyset\}$, se llamarán *malla mayor* y *malla menor* respectivamente.

1.- En el caso de colecciones infinitas la unión de una cadena puede no pertenecer a la colección, y por consiguiente no toda cadena es una malla, aunque a ella pertenezca el conjunto vacío. Retomando el ejemplo 2 de la página 8, sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales y consideremos la clase $\mathcal{S} = \mathbb{N} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Entonces la colección $\mathcal{S}$ (que está totalmente ordenada por inclusión y es ella misma una cadena) es cerrada respecto a uniones de cadenas finitas, pero la unión de una cadena que tenga infinitos miembros es $\mathbb{N}$, que no pertenece a $\mathcal{S}$, y por lo tanto $\mathcal{S}$ no es una malla.

2.- Las mallas no son necesariamente cadenas, por ejemplo, la malla $\mathcal{P}(X)$ formada por todas las partes de X es una cadena si y solo si X tiene a lo sumo un elemento. Esto dice que cuando hay más de un elemento la malla formada por todas las partes es demasiado grande para que todo par de subconjuntos sea comparable. Este comentario debe contrastarse con 17.

La definición de malla implica inmediatamente que

11.- La intersección de mallas es una malla

$$(\forall i \in I, \mathcal{M}_i \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}) \Rightarrow \bigcap_{i \in I} \mathcal{M}_i = \{M \mid \forall i \in I, M \in \mathcal{M}_i\} \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}$$

En particular,

12.- Si una colección de conjuntos está contenida en alguna malla entonces está contenida en una malla que es la menor de todas, esto es, si para algún $\mathcal{M}_0 \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ se cumple $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_0$ entonces existe una única malla $\mathcal{M}[\mathcal{A}] \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ para la cual

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M} \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}} \Rightarrow \mathcal{M}[\mathcal{A}] \subseteq \mathcal{M}$$

La malla $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$, denominada *malla generada* por $\mathcal{A}$, se obtiene intersectando los miembros de la familia, no vacía gracias a la existencia de $\mathcal{M}_0$, de las mallas que contienen a $\mathcal{A}$

$$\mathcal{M}[\mathcal{A}] = \bigcap \{\mathcal{M} \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M} \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}\} = \{M \mid \forall \mathcal{M} \ni \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M} \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}, M \in \mathcal{M}\}$$

En el mundo antiguo tuvo gran importancia el pesado tejido protector conocido como malla o *maille* y utilizado para confeccionar la *cota de malla*. El tejido consiste en una red metálica formada entrelazando numerosas cadenillas. Puesto que el término *cota* tiene un significado bien establecido y es de amplio uso en Matemáticas, hemos optado por el nombre malla para las familias monótonas. A nivel heurístico las cadenas pueden considerarse como mallas muy estrechas.

6. MALLAS INDUCTIVAS

Sea $s : \mathcal{S} \rightarrow X$ un selector. Una *mallá inductiva* es una mallá contenida en el dominio del selector y que es también un conjunto inductivo. Así, una colección $\mathcal{N}$ contenida en el dominio del selector, $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{S}$, es una mallá inductiva si es cerrada respecto a la unión de cadenas y contiene los sucesores de todos sus miembros. Denotaremos por $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ el conjunto de las mallas s -inductivas contenidas en $\mathcal{S}$, por lo tanto

$$\mathcal{S}_{\mathcal{N}} = \mathcal{S}_{\mathcal{M}} \cap \mathcal{S}_{\mathcal{I}}$$

siendo también el caso que $\mathcal{S}_{\mathcal{N}} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$. Según esta notación $\mathcal{N}$ es una mallá inductiva contenida en $\mathcal{S}$ si y solo si $\mathcal{N} \in \mathcal{S}_{\mathcal{N}}$.

Por una parte, la inductividad de $\mathcal{N}$ garantiza que contiene a todos los sucesores de sus miembros

$$C \in \mathcal{N} \Rightarrow C^+ \in \mathcal{N}, C^{++} \in \mathcal{N}, \dots$$

los cuales forman una cadena

$$C \subseteq C^+ \subseteq C^{++} \subseteq \dots$$

Por otra parte la condición de ser mallá hace que $\mathcal{N}$ contenga también la unión de esta cadena

$$C_{\omega} = \bigcup \{C, C^+, C^{++}, \dots\} \in \mathcal{N}$$

Y entonces nuevamente por inductividad se tiene

$$C_{\omega} \in \mathcal{N} \Rightarrow C_{\omega}^+ \in \mathcal{N}, C_{\omega}^{++} \in \mathcal{N}, \dots$$

repitiéndose indefinidamente el proceso de considerar sucesores y formar su unión.

La idea central en la prueba del Lema de Zorn es que dicha repetición alcanza un límite y entonces en la ‘secuencia de sucesores’ se llega eventualmente a un conjunto estacionario. Pero la existencia de ese conjunto no es obvia y, como se verá, requiere una prueba donde surgen sutilezas conceptuales y de razonamiento.

13.- Para cualquier selector $s : \mathcal{P}(X) \rightarrow X$ la mallá mayor es inductiva

$$\mathcal{P}(X) \in \mathcal{P}(X)_{\mathcal{N}}$$

14.- Para cualquier selector $s : \mathcal{S} \rightarrow X$ la mallá menor *no* es inductiva

$$\{\emptyset\} \notin \mathcal{S}_{\mathcal{N}}$$

Esto se debe a que, de acuerdo a las definiciones adoptadas, el sucesor del conjunto vacío *no* es vacío, $\emptyset^+ = \emptyset \cup \{s(\emptyset)\} = \{s(\emptyset)\} \neq \emptyset$, y por lo tanto el sucesor del vacío no pertenece a la mallá menor, $\emptyset^+ \notin \{\emptyset\}$.

Las definiciones también implican

15.- La intersección de mallas inductivas es una malla inductiva

$$\forall i \in I, \mathcal{N}_i \in \mathcal{S}_{\mathcal{N}} \Rightarrow \bigcap_{i \in I} \mathcal{N}_i = \{N \mid \forall i \in I, N \in \mathcal{N}_i\} \in \mathcal{S}_{\mathcal{N}}$$

El resultado básico sobre mallas inductivas, análogo a **7** y **12**, es de inmediata demostración:

16.- Si una colección de conjuntos está contenida en alguna malla inductiva entonces está contenida en una única malla inductiva que es la menor de todas, esto es, si existe al menos una malla inductiva $\mathcal{N}_0 \in \mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ para la cual se cumple $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}_0$ entonces existe también una única malla inductiva $\mathcal{N}[\mathcal{A}] \in \mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ tal que

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N} \in \mathcal{S}_{\mathcal{N}} \Rightarrow \mathcal{N}[\mathcal{A}] \subseteq \mathcal{N}$$

La malla inductiva $\mathcal{N}[\mathcal{A}]$ es la intersección de la familia de las mallas inductivas que contienen a $\mathcal{A}$

$$\mathcal{N}[\mathcal{A}] = \bigcap \{\mathcal{N} \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{N} \in \mathcal{S}_{\mathcal{N}}\} = \{N \mid \forall \mathcal{N} \ni \mathcal{A} \subseteq \mathcal{N} \in \mathcal{S}_{\mathcal{N}}, N \in \mathcal{N}\}$$

y se denomina *malla inductiva generada* por $\mathcal{A}$.

7. MINIMALIDAD

Supongamos que $\mathcal{S}$ contiene al menos una malla inductiva

$$\exists \mathcal{N} \in \mathcal{S}_{\mathcal{N}}$$

De particular interés es la malla inductiva $\mathcal{N}[\{\emptyset\}]$ que se obtiene tomando $\mathcal{A} = \{\emptyset\}$. En virtud de **8** esta malla inductiva, que llamaremos *malla inductiva minimal*, es la intersección de *todas* las mallas inductivas contenidas en $\mathcal{S}$.

$$\mathcal{N}[\{\emptyset\}] = \bigcap_{\mathcal{N} \in \mathcal{S}_{\mathcal{N}}} \mathcal{N}$$

y por lo tanto está contenida en todas las mallas inductivas de $\mathcal{S}$.

La malla inductiva minimal contiene al conjunto vacío y (por ser inductiva) a sus sucesores

$$\emptyset \in \mathcal{N}[\{\emptyset\}], \emptyset^+ \in \mathcal{N}[\{\emptyset\}], \emptyset^{++} \in \mathcal{N}[\{\emptyset\}], \dots$$

y contiene también (por ser malla) la unión de estos sucesores

$$\emptyset_{\omega} = \bigcup \{\emptyset, \emptyset^+, \emptyset^{++}, \dots\} \in \mathcal{N}[\{\emptyset\}]$$

Se pasa entonces a $\emptyset_{\omega}^+$, $\emptyset_{\omega}^{++}$ etc., y se repite continua mientras no aparezca un conjunto estacionario. Compare con los comentarios en la pagina **11**.

En el resto de esta sección supondremos que la malla inductiva minimal $\mathcal{N}[\{\emptyset\}]$ existe, para lo cual, insistimos, basta que exista una malla inductiva.

La siguiente proposición es fundamental.

17.- La malla inductiva minimal $\mathcal{N}[\{\emptyset\}]$ es una cadena.

En las cadenas todos los conjuntos son comparables entre si. Por lo tanto, para estudiar cadenas contenidas en mallas usaremos el siguiente concepto. Un conjunto T perteneciente a una malla $\mathcal{M}$ es *totalmente comparable* (dentro de la malla) si todos los demás miembros de malla o bien lo contienen o están contenidos en él, esto es, para todo $M \in \mathcal{M}$ se cumple

$$M \subseteq T \vee T \subseteq M$$

Para demostrar **17** basta entonces probar que

18.- Todos los miembros de la malla inductiva minimal $\mathcal{N}[\{\emptyset\}]$ son totalmente comparables (dentro de la malla inductiva minimal).

Sea $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{N}[\{\emptyset\}]$ la familia de los conjuntos totalmente comparables

$$\mathcal{T} = \{T \in \mathcal{N}[\{\emptyset\}] \mid T \text{ es totalmente comparable}\}$$

Para probar **18** basta con establecer que $\mathcal{N}[\{\emptyset\}] \subseteq \mathcal{T}$ y puesto que $\mathcal{N}[\{\emptyset\}]$ es inductiva minimal, es suficiente demostrar que

19.- La familia $\mathcal{T}$ de los conjuntos totalmente comparables es una malla inductiva.

La prueba de esta proposición consta de dos partes. Primeramente un resultado preliminar:

20.- Si un miembro de la malla inductiva minimal es totalmente comparable entonces los otros miembros o bien están contenidos en él o contienen a su sucesor, esto es, si $T \in \mathcal{T}$ y $N \in \mathcal{N}[\{\emptyset\}]$ entonces

$$N \subseteq T \vee T \cup \{f(T)\} \subseteq N \quad (1)$$

La expresion (1) es la *alternativa del sucesor*.

En el caso de los números naturales la alternativa del sucesor corresponde con el siguiente enunciado: Si t es un número natural entonces para todo número natural n se cumple $n \leq t$ o $t^+ \leq n$.

Razonamos así: Para cada uno de los conjuntos totalmente comparables $T_0 \in \mathcal{T}$ consideremos la colección $\mathcal{N}_a[T_0]$ formada por los miembros de la malla inductiva minimal que satisfacen la alternativa del sucesor (1) con $T = T_0$, es decir

$$\mathcal{N}_a[T_0] = \{N \in \mathcal{N}[\{\emptyset\}] \mid N \subseteq T_0 \vee T_0 \cup \{f(T_0)\} \subseteq N\}$$

Puesto que $\mathcal{N}_a[T_0] \subseteq \mathcal{N}[\{\emptyset\}]$ y $\mathcal{N}[\{\emptyset\}]$ es minimal, basta demostrar que $\mathcal{N}_a[T_0]$ es una malla inductiva para establecer que $\mathcal{N}_a[T_0] = \mathcal{N}[\{\emptyset\}]$; y siendo la

demostración válida para todo T_0 quedará probado que la alternativa del sucesor vale en general para todo T . La validez general de la alternativa del sucesor implica [22](#).

Verifiquemos que $\mathcal{N}_a[T_0]$ es efectivamente una malla inductiva.

21.- $\mathcal{N}_a[T_0]$ es una malla: La unión de cualquier cadena contenida en $\mathcal{N}_a[T_0]$ está en $\mathcal{N}_a[T_0]$.

En efecto, los miembros de una cadena $\mathcal{C}$ contenida en $\mathcal{N}_a[T_0]$, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{N}_a[T_0]$, satisfacen la alternativa del sucesor: o están todos contenidos en T_0 , o al menos uno de ellos contiene al sucesor de T_0 . En ambos casos la unión de la cadena satisface igualmente la alternativa del sucesor y por lo tanto $\mathcal{N}_a[T_0]$ es una malla.

La comprobación de la inductividad es un punto delicado.

22.- $\mathcal{N}_a[T_0]$ es inductiva: El sucesor de un miembro de $\mathcal{N}_a[T_0]$ está en $\mathcal{N}_a[T_0]$

$$N \in \mathcal{N}_a[T_0] \Rightarrow N^+ \in \mathcal{N}_a[T_0]$$

Detallemos la prueba. Partimos de la hipótesis $N \in \mathcal{N}_a[T_0]$, equivalente a la alternativa

$$N \subseteq T_0 \quad \vee \quad T_0^+ \subseteq N$$

y queremos concluir que $N^+ \in \mathcal{N}_a[T_0]$ lo cual, según definiciones, es lo mismo que

$$N^+ \subseteq T_0 \quad \vee \quad T_0^+ \subseteq N^+$$

Veamos que cualquiera de las dos alternativas de la hipótesis implica la deseada conclusión.

La primera alternativa es $N \subseteq T_0$ y surgen entonces dos posibilidades:

- a) $s(N) \in T_0$, por lo que $N^+ \subseteq T_0$ y se cumple la conclusión.
- b) $s(N) \notin T_0$ con lo cual $N^+ = N \cup \{s(N)\} \not\subseteq T_0$ pero entonces por ser T_0 totalmente comparable tiene que cumplirse $T_0 \subseteq N^+ = N \cup \{s(N)\}$ y forzosamente debe ser $T_0 = N$ (porque estamos en la primera alternativa) lo cual implica $T_0^+ = N^+ \subseteq N^+$ y también se cumple la conclusión.

La segunda alternativa es $T_0^+ \subseteq N$ que inmediatamente implica $T_0^+ \subseteq N^+$ y [22](#) queda probado, lo cual completa la demostración de [18](#) y por lo tanto [17](#) es cierto.

Llegamos así a la existencia de conjuntos estacionarios:

23.- La unión de los miembros de la malla inductiva minimal

$$N_{\text{máx}} = \bigcup \{N \mid N \in \mathcal{N}[\{\emptyset\}]\} = \{x \mid \exists N \in \mathcal{N}[\{\emptyset\}] \ni x \in N\}$$

es un conjunto estacionario.

Este enunciado implica instantáneamente el siguiente corolario

24.- En la malla inductiva minimal siempre existe al menos un conjunto estacionario.

La prueba de **23** consiste en hacer las siguientes observaciones, basadas en la definición de $N_{\text{máx}}$ y en que $\mathcal{N}[\{\emptyset\}]$ es una malla, es una cadena y es inductiva:

- (a) $\forall N \in \mathcal{N}[\{\emptyset\}], N \subseteq N_{\text{máx}}$
- (b) $N_{\text{máx}} \in \mathcal{N}[\{\emptyset\}]$
- (c) $N_{\text{máx}}^+ \in \mathcal{N}[\{\emptyset\}]$
- (d) $N_{\text{máx}}^+ \subseteq N_{\text{máx}}$
- (e) $N_{\text{máx}} \subseteq N_{\text{máx}}^+$
- (f) $N_{\text{máx}}^+ = N_{\text{máx}}$

Los correspondientes razonamientos son: (a) por definición de $N_{\text{máx}}$ (los uniendos están contenidos en la unión). (b) porque $N_{\text{máx}}$ es union de la cadena $\mathcal{N}[\{\emptyset\}]$ (en **17** se probó que $\mathcal{N}[\{\emptyset\}]$ es una cadena), la cual es una subfamilia de si misma, esto es, de la malla $\mathcal{N}[\{\emptyset\}]$. (c) por (b) y porque $\mathcal{N}[\{\emptyset\}]$ es inductiva. (d) por (c) y (a). (e) es obvio. (f) por (d) y (e). Queda probado que $N_{\text{máx}}$ es un conjunto estacionario.

El siguiente resultado permitirá deducir el lema de Zorn a partir del axioma de elección:

25.- Toda malla inductiva tiene miembros estacionarios:

$$\mathcal{N} \in \mathcal{S}_I \quad \Rightarrow \quad \exists N \in \mathcal{N} \ni N^+ = N$$

Basta observar que si existe una malla inductiva entonces contiene a la malla inductiva minimal la cual, de acuerdo a **24**, posee un miembro estacionario.

8. LAS CADENAS DE UN PREORDEN

Sea X un conjunto que, al contrario de la hipótesis en las secciones **3** a la **7**, supondremos es preordenado (y no vacío). El preorden permite especificar una colección muy particular de subconjuntos, a saber, la colección de los subconjuntos que son cadenas.

Recordemos que una cadena en C en el preorden X es un subconjunto sobre el cual el preorden es total, por lo tanto $C \subseteq X$ es una cadena si $c, c' \in C \Rightarrow (c \leq c' \vee c' \leq c)$.

La clase de las cadenas en X se denotará X_C

$$X_C = \{C \mid C \subseteq X \wedge C \text{ es cadena}\} \subseteq X$$

El preorden entre los elementos de la cadena $C \subseteq X$ es el inducido por el preorden de X . Por otra parte el orden entre las cadenas (las cuales son elementos del conjunto ordenado $X_C \subseteq \mathcal{P}(X)$) es dado por la contención entre subconjuntos.

Puesto que los conjuntos $\{c\}$ son cadenas, la colección X_C es no vacía.

26.- La colección X_C de las cadenas de un preorden X es una malla.

Para probar este enunciado debemos verificar que si $\mathcal{C} \subseteq X_C$ es una cadena entonces la union $C_u = \bigcup \{C \mid C \in \mathcal{C}\}$ está en X_C . En efecto, si $c, c' \in C_u$ entonces existen $C, C' \in \mathcal{C}$ tales que $c \in C$ y $c' \in C'$. Debido a que $\mathcal{C}$ es una cadena se debe cumplir $C \subseteq C'$ o bien $C' \subseteq C$; en el primer caso $c, c' \in C'$ y en el segundo $c, c' \in C$. Tanto C como C' son cadenas por lo que en cualquier caso c y c' son comparables y queda probado que C_u es una cadena, es decir, C_u es miembro de X_C .

9. PREORDEN INDUCTIVO

Un conjunto *preordenado inductivamente* o más brevemente un *preorden inductivo* es un conjunto X con una relación de preorden respecto a la cual todas las cadenas tienen cota superior

$$\forall C \in X_C \quad \exists u \in X \ni (\forall c \in C, c \leq u)$$

Denotemos por $U(C)$ el conjunto de las cotas superiores de la cadena C

$$U(C) = \{u \in X \mid \forall c \in C, c \leq u\}$$

entonces

27.- Un conjunto preordenado X es inductivo si y solo si el conjunto de las cotas superiores de cualquier cadena es no vacío.

$$\forall C \in X_C, U(C) \neq \emptyset$$

o sea

28.- Un conjunto preordenado X es inductivo si y solo si la familia indiciada $\{U(C)\}_{C \in X_C}$ de los conjuntos de cotas superiores de cadenas está formada por conjuntos no vacíos.

La noción de preorden inductivo se establece a partir de una relación de preorden $\leq$. Por otra parte la definición de conjunto *s-inductivo* requiere la existencia previa de un selector $s : \mathcal{S} \rightarrow X$. El contexto y la redacción suelen ser suficientes para evitar confusiones y disipar posibles ambigüedades.

10. SELECTOR PARA CADENAS DE UN PREORDEN INDUCTIVO

En esta sección X es un preorden inductivo y X_C es la malla de las cadenas en X . Hacemos ahora una primera invocación al axioma de elección para la prueba del Lema de Zorn: Lo aplicamos a la familia de las cadenas para inferir la existencia de un selector s_U .

29.- Supongamos cierto el axioma de elección y sea X un preorden inductivo. Existe un selector $s_U : X_C \rightarrow X$ que a cada cadena $C \subseteq X$ asigna una cota superior $s_U(C) \in U(C) \subseteq X$; la malla X_C es s_U -inductiva.

La existencia del selector s_U es simplemente **5** aplicado a la colección de conjuntos $\{U(C)\}_{C \in X_C}$ (no vacíos de acuerdo con **28**). La inductividad de X_C respecto a s_U es consecuencia de **3**. Esta propiedad, la s_U -inductividad de X_C , es un resultado esencial.

La función s_U obtenida en **29** es un *selector de cotas*.

Puesto que la malla X_C es s_U -inductiva queda establecido que X_C contiene un conjunto estacionario, esto es, hay una cadena $C \in X_C$ tal que $s_U(C) \in C$. Pero esto no basta para el Lema de Zorn.

Definamos $V(C)$ como el conjunto de los elementos que siguen a la cota superior $s_U(C)$ y no la preceden

$$V(C) = \{v \in X \mid u_C \leq v \wedge \neg(v \leq s_U(C))\}$$

Los elementos de $V(C)$ son *sobrecotas* (respecto a la cota $s_U(C)$) de C . La definición de las sobrecotas requiere la existencia previa del selector de cotas s_U , que se obtuvo, repetimos una vez más, mediante el axioma de elección.

Si un elemento de X no precede a la cota superior $s_U(C)$ entonces no puede pertenecer a C , luego

30.- Ninguna sobrecota pertenece a la cadena

$$\forall C \in X_C, C \cap V(C) = \emptyset$$

Y como un elemento es maximal cuando no hay otros que lo sigan, salvo si también lo preceden, se tiene

31.- El conjunto de las sobrecotas es vacío si y solo si la correspondiente cota seleccionada es maximal

$$V(C) = \emptyset \Leftrightarrow s_U(C) \text{ es maximal en } X$$

Hacemos ahora una segunda invocación al axioma de elección, similar a **29**.

32.- Supongamos cierto el axioma de elección. Si X es un orden inductivo con selector de cotas $s_U : X_{\mathcal{C}} \rightarrow X$ y para toda cadena $C \subseteq X$ se cumple $V(C) \neq \emptyset$ entonces hay un selector $s_V : X_{\mathcal{C}} \rightarrow X$ que para cada cadena $C \in X_{\mathcal{C}}$ selecciona una sobrecota $s_V(C) \in V(C) \subseteq X$; la malla $X_{\mathcal{C}}$ es s_V -inductiva.

La prueba es como en **29** pero utilizando ahora la colección de partes no vacías $\{V(C)\}_{C \in X_{\mathcal{C}}}$. La función s_V es un *selector de sobrecotas* que permite dar el paso final de la prueba del lema de Zorn.

La primera invocación del axioma de elección proporcionó un selector de cotas, y la convierte (a la malla de cadenas) en una malla inductiva. La segunda invocación, posible si suponemos que ninguna de las cotas previamente elegidas es maximal, permite seleccionar para cada cadena una sobrecota posiblemente mayor que la cota, y $X_{\mathcal{C}}$ resulta s_V -inductiva. Como veremos de inmediato, las sobrecotas no pueden existir para todos los miembros de una malla inductiva.

11. EL LEMA DE ZORN ES CONSECUENCIA DEL AXIOMA DE ELECCIÓN

Estamos en condiciones de completar la demostración del

33.- Lema de Zorn: Si se acepta el axioma de elección entonces todo orden inductivo tiene al menos un elemento maximal.

La prueba es por reducción al absurdo. Supóngase que *no* hay elementos maximales. Entonces según los resultados de la sección anterior hay un selector de sobrecotas $s_V : X_{\mathcal{C}} \rightarrow X$ y la malla $X_{\mathcal{C}}$ es s_V -inductiva. Según **25** hay un conjunto s_V -estacionario C_0 , es decir, $s_V(C_0) \in C_0$. Pero por construcción $s_V(C_0) \in V(C_0)$, lo cual contradice **30**.

Por cuanto suponer que no hay en X elementos maximales conduce a una contradicción, inferimos que para algún $C_0 \in X_{\mathcal{C}}$ debe cumplirse $V(C_0) = \emptyset$ y entonces $s_V(C_0)$ es elemento maximal. Queda demostrado que el axioma de elección (invocándolo dos veces y utilizando reducción al absurdo) implica el lema de Zorn.

12. FUNCIONES DE ELECCIÓN PARCIALMENTE DEFINIDAS

Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una colección de conjuntos no vacíos y considere su unión $X = \bigcup_{i \in I} X_i$. Dado $J \subseteq I$ una *función de elección sobre J* o *función de elección parcialmente definida* es una función de elección para la subcolección $\{X_i\}_{i \in J}$, esto es, una función

$$e_J : J \rightarrow X$$

tal que $\forall j \in J, e_J(j) \in X_j$.

Consideremos pares (J, e_J) tales que $J \in \mathcal{P}(I)$ y $e_J : J \rightarrow X$ es una función de elección sobre J . El conjunto de estos pares será denotado $\mathcal{E}$.

Definamos en $\mathcal{E}$ la siguiente relación: $(J, e_J) \leq (K, e_K)$ si $J \subseteq K$ y si e_K es una extensión de e_J , es decir, si $e_K|_J = e_J$. Obviamente $\leq$ es un orden en $\mathcal{E}$.

34.- Toda cadena en $\mathcal{E}$ tiene cota superior.

En efecto, si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$ es una cadena sea

$$J_{\mathcal{C}} = \bigcup \{J \mid (J, e_J) \in \mathcal{C}\}$$

y defina $e_{\mathcal{C}} : J_{\mathcal{C}} \rightarrow X$ como

$$e_{\mathcal{C}}(j) = e_J(j)$$

donde $(J, e_J) \in \mathcal{C}$ es tal que $j \in J$; el valor $e_{\mathcal{C}}(j)$ es independiente de (J, e_J) (porque $\mathcal{C}$ es una cadena) y en consecuencia $e_{\mathcal{C}}$ está bien definida. Obviamente $(J_{\mathcal{C}}, e_{\mathcal{C}})$ es cota superior de $\mathcal{C}$.

Si (J, e_J) un elemento de $\mathcal{E}$ y si i_0 es un índice que no pertenece a J , $i_0 \in I - J$, entonces es posible tomar un elemento cualquiera $x_{i_0} \in X_{i_0} \neq \emptyset$ y extender e_J a una función de elección e_J^+ sobre $J^+ = J \cup \{i_0\}$ definiendo $e_J^+(i_0) = x_{i_0}$. Es inmediato comprobar que $(J, e_J) \leq (J^+, e_J^+)$ y que $\neg((J^+, e_J^+) \leq (J, e_J))$, luego

35.- El par (J, e_J) es elemento maximal de $\mathcal{E}$ si y solo si $J = I$ (y entonces $e_J = e_I : I \rightarrow X = \bigcup_{i \in I} X_i$ es una función de elección sobre I).

13. EL AXIOMA DE ELECCIÓN ES CONSECUENCIA DEL LEMA DE ZORN

Enunciemos nuevamente el Lema de Zorn:

Todo orden inductivo tiene al menos un elemento maximal

36.- Supongamos cierto el Lema de Zorn. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una colección de conjuntos no vacíos, entonces existe al menos una función de elección

$$e : I \rightarrow \bigcup \{X_i \mid i \in I\}, \quad e(i) \in X_i \quad \forall i \in I$$

En efecto, según la definición de $\mathcal{E}$ en la sección anterior y la subsiguiente discusión, toda cadena en $\mathcal{E}$ tiene cota superior. Por el lema de Zorn, $\mathcal{E}$ tiene entonces algún elemento maximal (e_I, I) , el cual proporciona, según **35**, la deseada función de elección $e = e_I : I \rightarrow X = \bigcup_{i \in I} X_i$.

Tal como el venerable axioma de las paralelas (Postulado V de los *Elementos de Geometría* de Euclides), el enunciado del axioma de elección es de inmediata comprensión y parece

obvio. Sin embargo tiene como consecuencia, entre otras cosas, que el conjunto de los números reales admite un buen orden (vea la definición en cualquiera de los textos de referencia). Este tipo de orden en $\mathbb{R}$ nunca ha sido definido explícitamente y enfrentó –tal vez aún enfrenta– dudas y oposición. El rechazo contra el axioma de elección se debe más a sus consecuencias que al axioma mismo.

A lo largo de los años se ha logrado probar que el axioma de elección es independiente de los otros axiomas –mucho menos controvertidos– de la teoría de conjuntos. Esto significa no es posible demostrar (a partir de los otros postulados) ni el axioma ni su negación.

Referencias

- [1] Dugundji, James. *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.
- [2] Halmos, Paul R. *Teoría Intuitiva de los Conjuntos*, CECSA, México, 1965.
- [3] Kelley, John L. *Topología General*, EUDEBA, Buenos Aires, 1965.
- [4] Suppes, Patrick M. *Teoría Axiomática de Conjuntos*, Norma, Cali, 1968.

Oteyeva, Caracas, el 11 de Abril de 2007